SUPERMATEMATYK KLASA II marzec 2015

część I - zadania jednokrotnego wyboru – 10 pkt

<u>TYLKO JEDNA ODPOWIEDŹ POPRAWNA!</u>

1. Funkcja $g(x) = 3x^2 - 2$ nie przyjmuje wartości: a) $3 - 3\sqrt{3}$ b) $2 - 2\sqrt{3}$ c) $3 + \sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}$.

2. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa ma długość 15, a wysokość opuszczona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli jedną z przekątnych w stosunku 2 : 3. Wysokość ta dzieli dłuższą podstawę trapezu w stosunku: a) 2 : 3 b) 2 : 5 c) 3 : 5 d) 3 : 7.

3. Dane są liczby a, b, c, d takie, że $a \neq -b$, $d \neq 0$ i $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{d}$. Wówczas $b \neq 0$ iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy:
a) $\frac{c}{d-c}$ b) – 1 c) $\frac{d-c}{c}$ d) $\frac{d}{c-d}$.

4. Obie nierówności: $(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)x < 2x - 4$ i $(4-3x)^2 + 3x \leq (3x+1)^2 - 5x + 4$, są spełnione przez wszystkie liczby x należące do przedziału: a) $\langle -\frac{1}{2}; \infty)$ b) $(4; \infty)$ c) $(-4; \frac{1}{2}\rangle$ d) $\langle -\frac{1}{2}; 4)$.

5. Ujemna liczba a spełnia równanie $x^2 = 2x + 1$. Wynika stąd, że liczba a^2 jest równa:
a) $2\sqrt{2}$ b) $1 + \sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2} - 2$ d) $3 - 2\sqrt{2}$.

6. Ile rozwiązań rzeczywistych ma równanie $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{4 - x^2} = 0$? a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

7. Dane są dwie proste równoległe p i q. Na prostej p zaznaczono punkty A i B, a na prostej q – punkty C, D i E. Ile istnieje trójkątów o wierzchołkach w tych punktach? a) 7 b) 8 c) 9 d) 10.

8. W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$ i $\sphericalangle ACB = 36^o$, poprowadzono dwusieczną AD. Kąt ADC ma miarę: a) 72^o b) 108^o c) 128^o d) 144^o

9. Równania $ax + b = 0$ i $x^2 + ax + b = 0$ mają taki sam zbiór rozwiązań. Zatem:
a) $a = 0$ i $b > 0$ b) $a = 0$ i $b < 0$ c) $a \neq 0$ i $b > 0$ d) $a \neq 0$ i $b < 0$.

10. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 30^o, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego na krótszy bok wynosi 9 cm. Dłuższy bok równoległoboku ma długość:
a) $18\sqrt{3}$cm b) 18 cm c) $6\sqrt{3}$ cm d) $4\sqrt{3}$ cm.

część II - zadania wielokrotnego wyboru – 10 pkt (klasa II)

<u>WSZYSTKIE ODPOWIEDZI MOGĄ BYĆ POPRAWNE!</u>

1. Jeżeli $y = \frac{3+x}{2-x}$ to: a) $x = \frac{3+y}{2-y}$ b) $x = \frac{3y-2}{y+1}$ c) $x = \frac{2y-3}{y+1}$ d) $x = 2 - \frac{5}{y+1}$.

2. W ciągu pięciu liczb (3, __, __, __, 189) brakuje trzech wyrazów. Wiadomo, że każdy wyraz tego ciągu, począwszy od trzeciego, jest o trzy większy od podwojonego wyrazu poprzedniego. Zatem:
a) suma brakujących liczb jest większa od 70
b) wszystkie brakujące liczby są podzielne przez 3
c) jedna z brakujących liczb jest mniejsza od 20
d) iloczyn brakujących liczb jest większy niż 87778.

3. Równanie $ax - a = a^2x + a^2$ jest sprzeczne dla: a) $a = -1$ b) $a = 0$ c) $a = 1$ d) nie ma takiej wartości a.

4. Różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest zawsze liczbą:
a) nieparzystą b) podzielną przez 8 c) parzystą d) podzielną przez 3.

5. Liczbę t_n nazywamy liczbą trójkątną, jeżeli $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Dla liczb trójkątnych prawdą jest, że: a) $t_{39} + t_{49} = 2005$ b) istnieje takie n, że $t_{n+1} - t_n = n + 1$
c) dla każdego n spełniona jest równość $t_n + t_{n+1} = (n + 1)^2$
d) dla każdego n spełniona jest równość $t^2_{n+1} - t_n^2 = (n + 1)^2$.

6. Suma wszystkich liczb trzycyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 6 bez powtarzania cyfr w liczbie wynosi: a) mniej niż 2006 b) 1989 c) więcej niż 2000 d) 1998.

7. Liczby a, b, c, d i e są dodatnie oraz $\sqrt[4]{abcd} = 2\sqrt{10}$ i $\sqrt[5]{abcde} = 2\sqrt[5]{50}$. Wówczas:
a) e = 1 b) e > 1 c) e < 2 d) nie można wyznaczyć liczby e.

8. Liczba x jest taką liczbą dodatnią, że $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$. Wówczas, jeżeli $a = x^3 + \frac{1}{x^3}$, to:
a) a = 8 b) $a = 3\sqrt{6}$ c) a > 2 d) a > 9.

9. Liczby a, b, c przy dzieleniu przez 7 dają reszty odpowiednio równe 1, 2, 3. Liczba $a^2 + b^2 + c^2$ przy dzieleniu przez 7 daje resztę r. Zatem: a) r > 1 b) r < 6 c) r = 6 d) r = 0.

10. Jeżeli n > 1 jest liczbą całkowitą, to równość $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ jest spełniona dla: a) $a = \frac{n+1}{2}$ i $b = \frac{n(n+1)}{2}$
b) $a = \frac{n(n+1)}{2}$ i $b = \frac{n(n+1)}{2}$ c) $a = \frac{n(n+1)}{2}$ i $b = \frac{n+1}{2}$ d) $a = \frac{n+1}{2}$ i $b = \frac{n+1}{2}$.

część III – zadania otwarte – 20 pkt (klasa II)

<u>KAŻDE ZADANIE ROZWIĄŻ NA ODDZIELNEJ KARTCE!</u>

1. Wykaż, że:
a) jeśli liczby a, b, c spełniają warunek $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, to a = b = c,
b) jeśli w pierścieniu kołowym cięciwa zewnętrznego okręgu ma długość 10 i jest styczna do wewnętrznego okręgu, to pole tego pierścienia można wyrazić wzorem, w którym nie występują promienie wyznaczających go okręgów.

2. Telewizja kablowa w pewnym mieście obsługuje 5000 domów i kosztuje 80 zł miesięcznie. Badania marketingowe wskazują, że każda obniżka ceny o 1 zł zachęca 125 nowych klientów.
Zapisz funkcję zysku miesięcznego Z(x) spółki przy abonamencie miesięcznym x zł oraz naszkicuj wykres funkcji Z(x) i znajdź tę wartość x, przy której zyski spółki będą największe.

3. Wykres funkcji kwadratowej y = f(x) przechodzi przez początek układu współrzędnych.
Funkcja g(x) = f (x + 1) przyjmuje wartość największą, równą 12, dla argumentu x = 1. Podaj wzory funkcji f i g w postaci ogólnej.

4. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\frac{3}{2}$ i 2 wpisano okrąg. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołka kąta prostego tego trójkąta.

Powodzenia!!!